

Второй тур 28.11.2024. Вторая лига.

1. Все рёбра тетраэдра T_1 увеличили на метр и получили тетраэдр T_2 . Обязательно ли T_1 можно поместить внутрь T_2 ?

2. Дано простое число p . Пусть n — наименьшее натуральное число, большее 1, такое, что $n^6 - 1$ делится на p . Докажите, что тогда одно из чисел $(n+1)^6 - 1$ или $(n+2)^6 - 1$ также делится на p .

3. На вечеринке присутствуют n человек. Среди них есть не более $n-1$ пары друзей. Два человека пожимают друг другу руки тогда и только тогда, когда у них есть хотя бы 1 общий друг. Дано целое число $m \geq 3$ такое, что $n \leq m^3$. Докажите, что существует человек A , который пожал руку не более чем $d \cdot (m-1)$ людям, где d — количество друзей A .

4. Найдите наименьшее C , для которого можно выбрать такие различные неотрицательные целые числа $t_1, t_2, \dots, t_{2024}$, не превосходящие 6000, что для любых положительных $x_0, x_1, \dots, x_{2000}$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{2024} \sum_{p+q+r=t_i} x_p x_q x_r \leq C \left(\sum_{j=0}^{2000} x_j \right)^3.$$

5. Точка H — ортоцентр остроугольного неравностороннего треугольника ABC соответственно. Точки P и Q выбраны на описанной окружности ω так, что $\angle BPH = \angle CQH = 90^\circ$. Пусть прямая PQ пересекает касательную к ω , проведенную в точке A , в точке S . Докажите, что точка S лежит на средней линии треугольника ABC .

6. Пусть $p > 2$ — простое число. Назовем перестановку a_1, a_2, \dots, a_p чисел $1, 2, 3, \dots, p$ хорошей, если для любого натурального $i \leq p$ существует натуральное k такое, что $a_i \equiv i^k \pmod{p}$. Докажите, что количество хороших перестановок является натуральным делителем числа $(p-1)!$.

7. Докажите, что для любой функции $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ существуют такие $a, b, c \in \mathbb{Q}$, что $a < b < c$, $f(b) \geq f(a)$ и $f(b) \geq f(c)$.

8. Некоторые клетки квадрата 2024×2024 покрашены в один из трех цветов. При этом каждый цвет присутствует, и для каждой покрашенной клетки есть ровно 3 клетки в ее столбце и строке, покрашенные в другие цвета. Какое наибольшее количество клеток могли быть покрашены?

9. Маша и Надя играют в следующую игру. У Маши есть 2024 монеты, а у Нади — 2023 монеты. Они одновременно бросают все имеющиеся у них монеты. Маша выигрывает, если у нее строго больше орлов, чем у Нади, в противном случае выигрывает Надя. Какова вероятность того, что Маша выиграет в этой игре? Каждая монета равновероятно выпадает либо орлом, либо решкой.

10. Точки A, B, C, D, E, F таковы, что каждая из четвёрок (A, B, C, D) , (C, D, E, F) , (E, F, A, B) лежит на одной окружности, и все эти окружности различны. Оказалось, что $AB \perp DE$, $BC \perp EF$, $CD \perp FA$. Прямые BC, DE, FA образуют треугольник T_1 , а прямые AD, BE, CF — треугольник T_2 . Докажите, что их описанные окружности касаются.

Второй тур 28.11.2024. Третья лига.

1. Стороны треугольника T_2 на 1 больше соответствующих сторон треугольника T_1 . Верно ли, что треугольник T_1 всегда можно накрыть треугольником T_2 ?

2. Дано простое число p . Пусть n — наименьшее натуральное число, большее 1, такое, что $n^6 - 1$ делится на p . Докажите, что тогда одно из чисел $(n + 1)^6 - 1$ или $(n + 2)^6 - 1$ также делится на p .

3. На вечеринке присутствуют n человек. Среди них есть не более $n - 1$ пары друзей. Два человека пожимают друг другу руки тогда и только тогда, когда у них есть хотя бы 1 общий друг. Дано целое число $m \geq 3$ такое, что $n \leq m^2$. Докажите, что существует человек A , который пожал руку не более чем $d \cdot (m - 1)$ людям, где d — количество друзей A .

4. Найдите все вещественные числа a, b, c такие, что квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет следующим условиям: $|P(x)| \leq 1$ при $|x| \leq 1$ и $P(x) \geq 7$ при $x \geq 2$.

5. Точка H — ортоцентр остроугольного неравнобедренного треугольника ABC соответственно. Точки P и Q выбраны на описанной окружности ω так, что $\angle BPH = \angle CQH = 90^\circ$. Пусть прямая PQ пересекает касательную к ω , проведенную в точке A , в точке S . Докажите, что точка S лежит на средней линии треугольника ABC .

6. Пусть $p > 2$ — простое число. Назовем перестановку a_1, a_2, \dots, a_p чисел $1, 2, 3, \dots, p$ *хорошей*, если для любого натурального $i \leq p$ существует натуральное k такое, что $a_i \equiv i^k \pmod{p}$. Докажите, что количество хороших перестановок является натуральным делителем числа $(p - 1)!$.

7. Докажите, что для любой функции $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ существуют такие $a, b, c \in \mathbb{Q}$, что $a < b < c$, $f(b) \geq f(a)$ и $f(b) \geq f(c)$.

8. Некоторые клетки квадрата 2024×2024 покрашены в один из трех цветов. При этом каждый цвет присутствует, и для каждой покрашенной клетки есть ровно 3 клетки в ее столбце и строке, покрашенные в другие цвета. Какое наибольшее количество клеток могли быть покрашены?

9. Маша и Надя играют в следующую игру. У Маши есть 2024 монеты, а у Нади — 2023 монеты. Они одновременно бросают все имеющиеся у них монеты. Маша выигрывает, если у нее строго больше орлов, чем у Нади, в противном случае выигрывает Надя. Какова вероятность того, что Маша выиграет в этой игре? Каждая монета равновероятно выпадает либо орлом, либо решкой.

10. Окружности s_1 и s_2 касаются внешним образом. Их линия центров пересекает s_1 в точках A и P , и пересекает s_2 в точках B и R . Общая внешняя касательная касается s_1 и s_2 в точках A_1 и B_1 соответственно. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке Q . Докажите, что PQ является общей касательной для s_1 и s_2 .